Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12

а) Решите уравнение $\frac{3\cos 2x + 7\sin x - 5}{9\cos^2 x - 5} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3}{2}\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} 3 - 6\sin^2 x + 7\sin x - 5 = 0, \\ 9\cos^2 x - 5 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 6\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0, \\ \cos^2 x \neq \frac{5}{9}. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2}{3}, \\ \cos x \neq \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x \neq \pm\frac{\sqrt{5}}{3}. \end{cases}$$

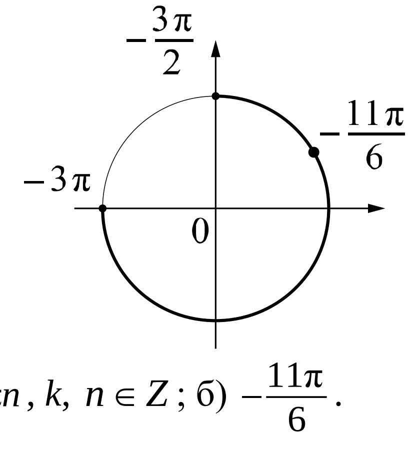
При $\sin x = \frac{2}{3}$ не выполнено условие $\cos x \neq \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

При $\sin x = \frac{1}{2}$ находим

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z, \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[-3\pi; -\frac{3}{2}\pi\right]$.

Получим $-\frac{11\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $k,\ n \in Z$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

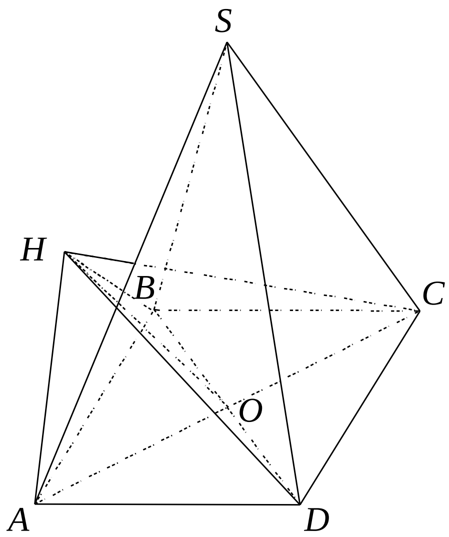
13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD.

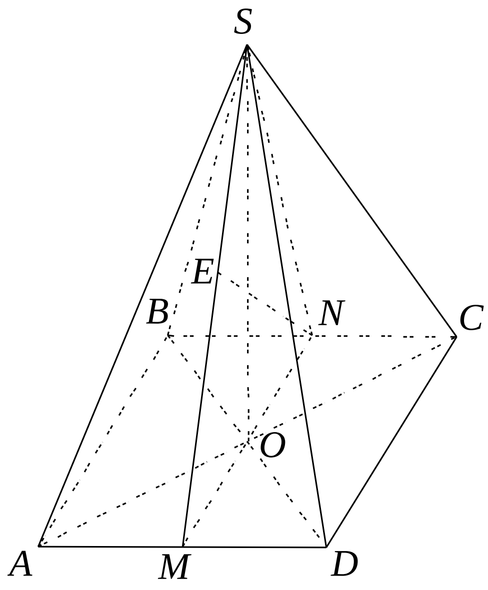
а) Докажите, что $\angle AHC = 90°$.

б) Найдите объём пирамиды, если $HA = \sqrt{2}$ и $HC = 4$.

Решение.

а) Пусть O — центр основания. Прямая BH перпендикулярна плоскости SAD, поэтому прямые BH и HD перпендикулярны. В прямоугольном треугольнике BHD медиана равна половине гипотенузы: $OH = \frac{1}{2}BD$. Тогда в треугольнике AHC медиана OH равна половине стороны AC, поэтому треугольник AHC прямоугольный.





б) В треугольнике AHC находим $AC = 3\sqrt{2}$, значит, сторона основания пирамиды равна 3. Пусть M — середина AD, а N — середина BC. Пусть NE — высота в треугольнике MSN. Тогда $MN = 3$, а $ME = AH = \sqrt{2}$. Поэтому из подобия треугольников MEN и MOS получим

$$MS = \frac{MO \cdot MN}{EM} = \frac{9}{2\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$SO = \sqrt{MS^2 - MO^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AB^2 = \frac{9\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{14}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\left(27-2x^2-3x\right)\ge 2\cdot\log_{\frac{1}{9}}\left(24-x^2-x\right)$.

Решение.

Преобразуем неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\left(27-2x^2-3x\right)\ge \log_{\frac{1}{3}}\left(24-x^2-x\right)$.

Перейдём к системе: $\begin{cases}27-2x^2-3x\le 24-x^2-x,\\ 2x^2+3x-27<0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-1)(x+3)\ge 0,\\ (x+4,5)(x-3)<0.\end{cases}$

Получаем $x\in(-4,5;\,-3]\cup[1;3)$.

Ответ: $(-4,5;\,-3]$; $[1;3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -3 и/или 1. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле планируется взять в банке некоторую сумму в кредит на три года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года нужно внести платёж, равный 2,662 млн рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что долг был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S млн рублей, а ежегодные выплаты составляют $x=2,662$ млн рублей. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\quad 1{,}1S-x;\quad 1{,}1^2S-(1{,}1x+x);\quad 1{,}1^3S-\left(1{,}1^2x+1{,}1x+x\right)=0,$$

и тогда $S=\dfrac{\left(1{,}1^3-1\right)x}{1{,}1^3\cdot(1{,}1-1)}=\dfrac{331\cdot 2{,}662}{1331\cdot 0{,}1}=6{,}62$ млн рублей.

Ответ: 6,62.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Из вершины тупого угла C треугольника ABC проведена высота CH. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, а прямая CH — эту окружность в точке D.

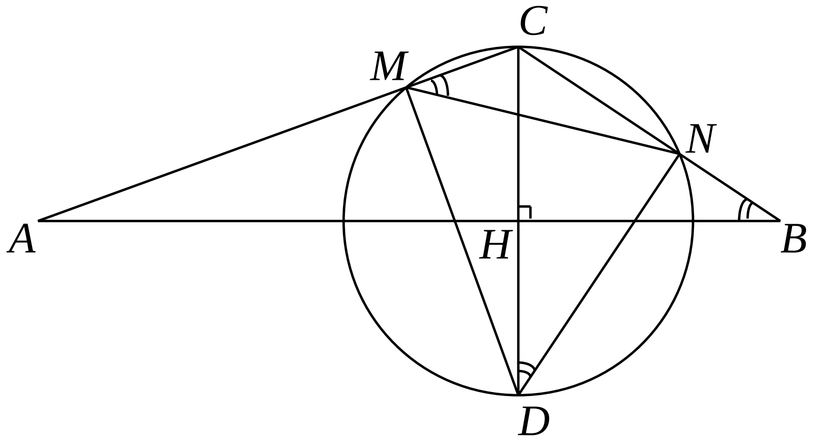
а) Докажите, что угол MDN равен сумме углов A и B треугольника ABC.

б) Найдите отношение MN к AB, если известно, что $CM:MA=2:25$ и $CN:NB=2:1$.

<u>Решение.</u>

а) Четырёхугольник $CMDN$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle MDN = 180° - \angle MCN = 180° - \angle ACB = \angle CAB + \angle CBA.$$



б) Вписанные углы CMN и CDN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CMN = \angle CDN$. У прямоугольных треугольников CND и CHB общий острый угол при вершине C, поэтому $\angle CBH = \angle CDN = \angle CMN$. Треугольник ABC подобен треугольнику NMC по двум углам, значит, $\frac{CN}{AC} = \frac{CM}{BC}$.

Положим

$$CN = 2a,\ NB = a,\ MA = 25b,\ CM = 2b.$$

Тогда $\frac{2a}{27b} = \frac{2b}{3a}$, следовательно, $\frac{a}{b} = 3$. Значит, коэффициент подобия треугольников ABC и NMC равен

$$\frac{CN}{AC} = \frac{2a}{27b} = \frac{2}{9}.$$

Следовательно, $\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{CN}{AC}=\dfrac{2}{9}$.

Ответ: б) 2:9.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2\cos^2 x+\left(5a+\frac{1}{a+1}\right)|\sin x|=a^2-6a+2$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Если x — решение данного уравнения, то число $-x$ тоже решение. Отсюда следует, что единственным решением данного уравнения может быть только $x=0$. Тогда получаем

$$2=a^2-6a+2;\ a^2-6a=0,\ \text{следовательно, } a=0 \text{ или } a=6.$$

1. Пусть $a=0$. Тогда

$$2\cos^2 x+|\sin x|=2;\quad 2-2\sin^2 x+|\sin x|=2,$$

следовательно, $|\sin x|=0$ или $|\sin x|=\frac{1}{2}$. Имеется 3 решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Пусть $a=6$. Тогда

$$2\cos^2 x+\frac{211}{7}|\sin x|=2;\ -2\sin^2 x+\frac{211}{7}|\sin x|=0,$$

следовательно, $|\sin x| = 0$ или $|\sin x| = \dfrac{211}{14}$.

Уравнение $|\sin x| = \dfrac{211}{14}$ решений не имеет, а уравнение $|\sin x| = 0$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: $a = 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено значение параметра, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено неверное значение параметра из-за арифметической ошибки	2
Задача сведена к исследованию корней тригонометрического уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 У Вани есть несколько пакетов с вещами, каждый из которых весит целое число килограммов. Он хочет разложить все эти пакеты, не перекладывая их содержимое, по n имеющимся у него одинаковым рюкзакам. В каждый рюкзак можно положить любое число пакетов, суммарная масса которых не превосходит m килограммов.

а) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 3, 6, 9, 12, 15, 18 и 21 кг, если $n = 3$ и $m = 29$?

б) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 2, 5, 8, 11, 14, 17 и 20 кг, если $n = 3$ и $m = 26$?

в) Какое наименьшее значение может принимать m, чтобы Ваня при $n = 4$ смог разложить таким образом девять пакетов, которые весят 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 и 19 кг?

Решение.

а) Поскольку масса каждого пакета в килограммах делится на 3, в каждый рюкзак получится поместить только кратное 3 число килограммов пакетов с вещами. Значит, в рюкзаках можно поместить пакеты общей массой не более $3 \cdot 27 = 81$ кг. Суммарный вес всех пакетов равен 84 кг. Значит, разложить пакеты таким образом не получится.

б) Суммарный вес всех пакетов равен 77 кг, а в рюкзаки суммарно можно поместить 78 кг. Значит, если разложить пакеты требуемым образом по рюкзакам возможно, то в одном рюкзаке окажутся пакеты с суммарным весом 25 кг, а в двух других — с суммарным весом 26 кг.

Пакеты с массами 17 и 20 кг окажутся при этом в разных рюкзаках. Однако и пакет массой 20 кг, и пакет массой 17 кг нельзя дополнить другими пакетами так, чтобы получился набор пакетов с общей массой 26 кг. Получили противоречие.

в) Суммарный вес всех пакетов равен 99 кг, а в рюкзаки суммарно можно поместить $4m$ кг. Значит, $m \geq 25$.

Если при $m = 25$ разложить пакеты требуемым образом по рюкзакам возможно, то в одном рюкзаке окажутся пакеты с суммарным весом 24 кг, а в трёх других — с суммарным весом 25 кг.

Пакеты с массами 17 и 19 кг окажутся при этом в разных рюкзаках. Пакет массой 19 кг нельзя дополнить другими пакетами, чтобы получился набор пакетов с общей массой 25 кг, а чтобы получился такой набор с общей массой 24 кг — возможно, но только единственным образом — с помощью одного пакета массой 5 кг. В последнем случае пакет массой 17 кг нельзя дополнить оставшимися пакетами до набора, общая масса которого 25 кг. Получили противоречие.

Если $m = 26$, то разложить пакеты требуемым образом возможно. Например, можно положить в первый рюкзак пакеты массами 19 и 7 кг, во второй — массами 17 и 9 кг, в третий — массами 15 и 11 кг, в четвёртый — массами 13, 5 и 3 кг.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 26.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12

а) Решите уравнение $\dfrac{5\cos 2x+9\sin x-7}{25\cos^2 x-21}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\dfrac{7}{2}\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases}5-10\sin^2 x+9\sin x-7=0,\\ 25\cos^2 x-21\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}10\sin^2 x-9\sin x+2=0,\\ \cos^2 x\neq \dfrac{21}{25}.\end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{2}{5},\\ \cos x\neq \pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \cos x\neq \pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}.\end{cases}$$

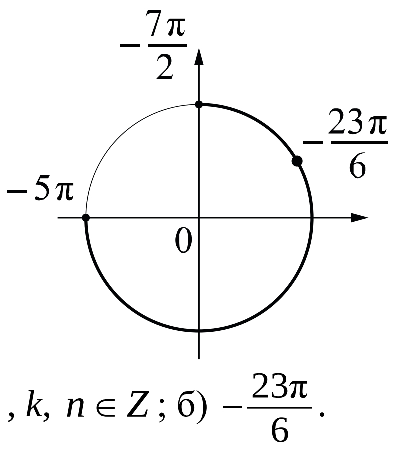
При $\sin x=\dfrac{2}{5}$ не выполнено условие $\cos x\neq \pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

При $\sin x=\dfrac{1}{2}$ находим

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z,\ \text{или}\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[-5\pi;-\dfrac{7}{2}\pi\right]$.

Получим $-\dfrac{23\pi}{6}$.



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $k,\ n\in Z$; б) $-\dfrac{23\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

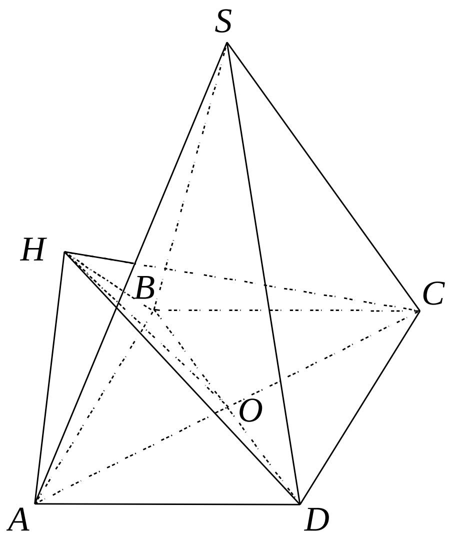
13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD.

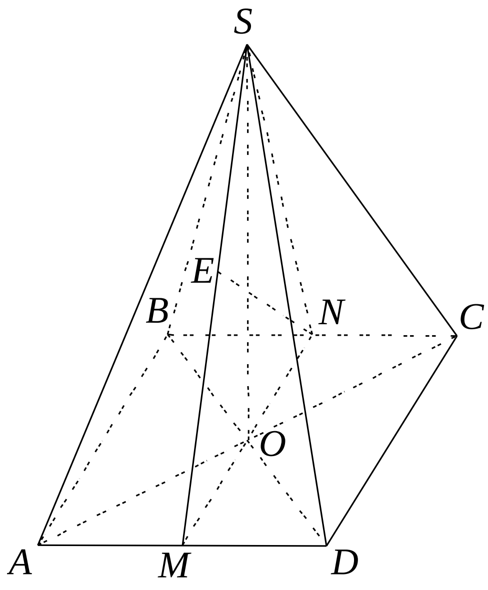
а) Докажите, что $\angle AHC = 90°$.

б) Найдите объём пирамиды, если $HA = 2\sqrt{2}$ и $HC = 8$.

Решение.

а) Пусть O — центр основания. Прямая BH перпендикулярна плоскости SAD, поэтому прямые BH и HD перпендикулярны. В прямоугольном треугольнике BHD медиана равна половине гипотенузы: $OH = \frac{1}{2}BD$. Тогда в треугольнике AHC медиана OH равна половине стороны AC, поэтому треугольник AHC прямоугольный.





б) В треугольнике AHC находим $AC = 6\sqrt{2}$, значит, сторона основания пирамиды равна 6. Пусть M — середина AD, а N — середина BC. Пусть NE — высота в треугольнике MSN. Тогда $MN = 6$, а $ME = AH = 2\sqrt{2}$. Поэтому из подобия треугольников MEN и MOS получим

$$MS = \frac{MO \cdot MN}{EM} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$SO = \sqrt{MS^2 - MO^2} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AB^2 = 18\sqrt{14}.$$

Ответ: б) $18\sqrt{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(35-2x^2+3x\right)\ge 3\log_{\frac{1}{8}}\left(33-x^2+2x\right)$.

Решение.

Преобразуем неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(35-2x^2+3x\right)\ge \log_{\frac{1}{2}}\left(33-x^2+2x\right)$.

Перейдём к системе: $\begin{cases}35-2x^2+3x\le 33-x^2+2x,\\ 2x^2-3x-35<0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)(x+1)\ge 0,\\ (x+3{,}5)(x-5)<0.\end{cases}$

Получаем $x\in(-3{,}5;\,-1]\cup[2;5)$.

Ответ: $(-3{,}5;\,-1]$; $[2;5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -1 и/или 2. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле планируется взять в банке некоторую сумму в кредит на три года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года нужно внести платёж, равный 2,592 млн рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что долг был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S млн рублей, а ежегодные выплаты составляют $x=2{,}592$ млн рублей. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\quad 1{,}2S-x;\quad 1{,}2^2S-\left(1{,}2x+x\right);\quad 1{,}2^3S-\left(1{,}2^2x+1{,}2x+x\right)=0,$$

и тогда $S=\dfrac{\left(1{,}2^3-1\right)x}{1{,}2^3\cdot\left(1{,}2-1\right)}=\dfrac{728\cdot 2{,}592}{1728\cdot 0{,}2}=5{,}46$ млн рублей.

Ответ: 5,46.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Из вершины тупого угла C треугольника ABC проведена высота CH. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, а прямая CH — эту окружность в точке D.

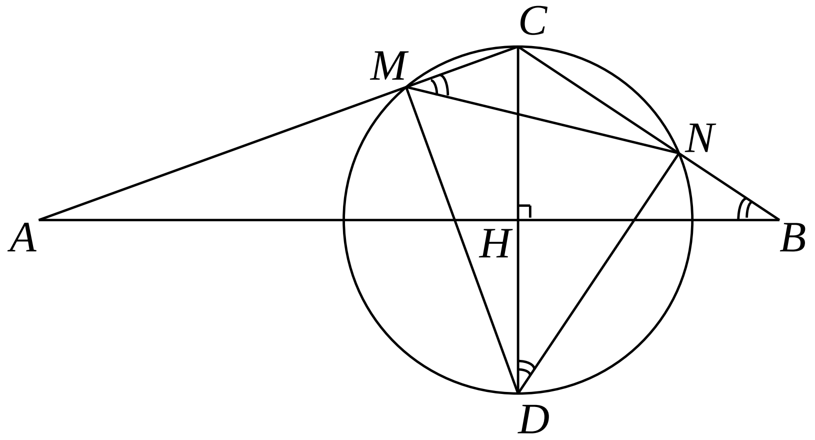
а) Докажите, что угол MDN равен сумме углов A и B треугольника ABC.

б) Найдите отношение MN к AB, если известно, что $CM:MA=1:11$ и $CN:NB=3:1$.

Решение.

а) Четырёхугольник $CMDN$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle MDN = 180° - \angle MCN = 180° - \angle ACB = \angle CAB + \angle CBA.$$



б) Вписанные углы CMN и CDN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CMN = \angle CDN$. У прямоугольных треугольников CND и CHB общий острый угол при вершине C, поэтому $\angle CBH = \angle CDN = \angle CMN$. Треугольник ABC подобен треугольнику NMC по двум углам, значит, $\frac{CN}{AC} = \frac{CM}{BC}$.

Положим

$$CN = 3a,\ NB = a,\ MA = 11b,\ CM = b.$$

Тогда $\frac{3a}{12b} = \frac{b}{4a}$, следовательно, $\frac{a}{b} = 1$. Значит, коэффициент подобия треугольников ABC и NMC равен

$$\frac{CN}{AC} = \frac{3a}{12b} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\frac{MN}{AB}=\frac{CN}{AC}=\frac{1}{4}$.

Ответ: б) 1:4.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3\cos^2 x+\left(4a+\frac{1}{a+1}\right)|\sin x|=a^2-4a+3$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Если x — решение данного уравнения, то число $-x$ тоже решение. Отсюда следует, что единственным решением данного уравнения может быть только $x=0$. Тогда получаем

$$3=a^2-4a+3;\ a^2-4a=0, \text{ следовательно, } a=0 \text{ или } a=4.$$

1. Пусть $a=0$. Тогда

$$3\cos^2 x+|\sin x|=3;\quad 3-3\sin^2 x+|\sin x|=3,$$

следовательно, $|\sin x|=0$ или $|\sin x|=\frac{1}{3}$. Имеется 3 решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Пусть $a=4$. Тогда

$$3\cos^2 x+\frac{81}{5}|\sin x|=3;\ -3\sin^2 x+\frac{81}{5}|\sin x|=0,$$

следовательно, $|\sin x| = 0$ или $|\sin x| = \frac{27}{5}$.

Уравнение $|\sin x| = \frac{27}{5}$ решений не имеет, а уравнение $|\sin x| = 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: $a = 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено значение параметра, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено неверное значение параметра из-за арифметической ошибки	2
Задача сведена к исследованию корней тригонометрического уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 У Вани есть несколько пакетов с вещами, каждый из которых весит целое число килограммов. Он хочет разложить все эти пакеты, не перекладывая их содержимое, по n имеющимся у него одинаковым рюкзакам. В каждый рюкзак можно положить любое число пакетов, суммарная масса которых не превосходит m килограммов.

а) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 3, 9, 12, 15, 18, 21 и 24 кг, если $n = 3$ и $m = 35$?

б) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 2, 8, 11, 14, 17, 20 и 23 кг, если $n = 3$ и $m = 32$?

в) Какое наименьшее значение может принимать m, чтобы Ваня при $n = 4$ смог разложить таким образом девять пакетов, которые весят 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21 кг?

__Решение.__

а) Поскольку масса каждого пакета в килограммах делится на 3, в каждый рюкзак получится поместить только кратное 3 число килограммов пакетов с вещами. Значит, в рюкзаках можно поместить пакеты общей массой не более $3 \cdot 33 = 99$ кг. Суммарный вес всех пакетов равен 102 кг. Значит, разложить пакеты таким образом не получится.

б) Суммарный вес всех пакетов равен 95 кг, а в рюкзаки суммарно можно поместить 96 кг. Значит, если разложить пакеты требуемым образом по рюкзакам возможно, то в одном рюкзаке окажутся пакеты с суммарным весом 31 кг, а в двух других — с суммарным весом 32 кг.

Пакеты с массами 20 и 23 кг окажутся при этом в разных рюкзаках. Однако и пакет массой 23 кг, и пакет массой 20 кг нельзя дополнить другими пакетами так, чтобы получился набор пакетов с общей массой 32 кг. Получили противоречие.

в) Суммарный вес всех пакетов равен 115 кг, а в рюкзаки суммарно можно поместить $4m$ кг. Значит, $m \geq 29$.

Если при $m = 29$ разложить пакеты требуемым образом по рюкзакам возможно, то в одном рюкзаке окажутся пакеты с суммарным весом 28 кг, а в трёх других — с суммарным весом 29 кг.

Пакеты с массами 19 и 21 кг окажутся при этом в разных рюкзаках. Пакет массой 21 кг нельзя дополнить другими пакетами, чтобы получился набор пакетов с общей массой 29 кг, а чтобы получился такой набор с общей массой 28 кг — возможно, но только единственным образом — с помощью одного пакета массой 7 кг. В последнем случае пакет массой 19 кг нельзя дополнить оставшимися пакетами до набора, общая масса которого 29 кг. Получили противоречие.

Если $m = 30$, то разложить пакеты требуемым образом возможно. Например, можно положить в первый рюкзак пакеты массами 21 и 9 кг, во второй — массами 19 и 11 кг, в третий — массами 17 и 13 кг, в четвёртый — массами 15, 7 и 3 кг.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 30.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*