Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20 Решите неравенство $(x-2)^2<\sqrt{3}(x-2)$.

Решение.
Преобразуем исходное неравенство:
$$(x-2)^2-\sqrt{3}(x-2)<0;\ (x-2)\left(x-2-\sqrt{3}\right)<0,$$
откуда следует, что $2<x<2+\sqrt{3}$.
Ответ: $(2;\,2+\sqrt{3})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

21 Моторная лодка прошла против течения реки 132 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 5 часов меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.
Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна v км/ч, очевидно, что $v>5$. Получаем уравнение:
$$\frac{132}{v-5}-\frac{132}{v+5}=5;$$
$$132v+660-132v+660=5v^2-125;$$
$$v^2=289,$$
откуда $v=17$ или $v=-17$.
Собственная скорость моторной лодки 17 км/ч.
Ответ: 17 км/ч.

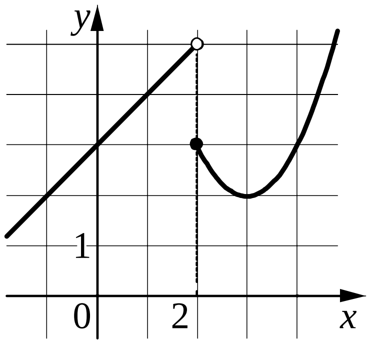
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

22 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-6x+11 & \text{при } x\ge 2, \\ x+3 & \text{при } x<2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.



Построим график функции $y=x+3$ при $x<2$.

Это луч с началом в точке $(2;5)$ (точка не принадлежит лучу), проходящий через точку $(0;3)$.

Построим график функции $y=x^2-6x+11$ при $x\ge 2$.

Это часть параболы с вершиной $(3;2)$ и направленными вверх ветвями, ограниченная точкой $(2;3)$.

При каждом значении m прямая $y=m$ параллельна оси Ox или совпадает с ней.

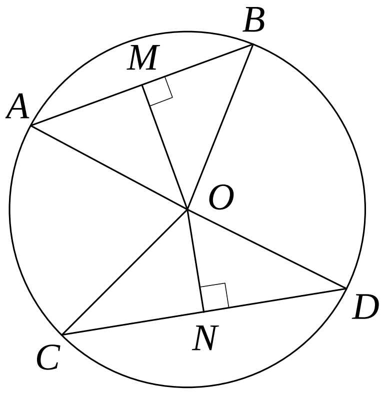
Прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при $m=2$ или $3<m<5$.

Ответ: $m=2$; $3<m<5$.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

23 Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 20$, $CD = 48$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24.

Решение.



Пусть $OM = 24$ и ON — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем:

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 26.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 26$, значит,

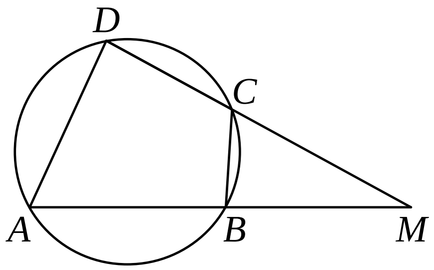
$$ON = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = 10.$$

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

24 Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

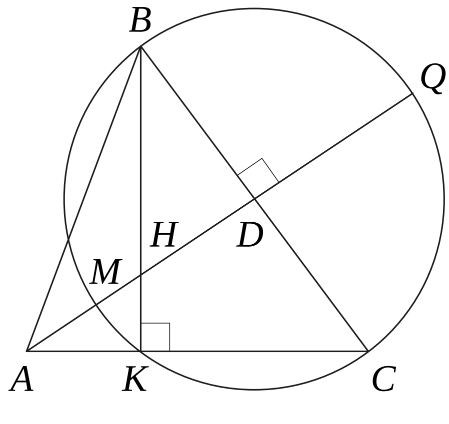
Доказательство.
Можно считать, что точка C лежит между точками D и M (см. рисунок).
У треугольников MBC и MDA угол M общий. Кроме того, $\angle MBC = 180° - \angle ABC$ как смежный, а $\angle ADC = 180° - \angle ABC$ по свойству вписанного четырёхугольника, поэтому $\angle ADM = \angle CBM$. Значит, треугольники MBC и MDA подобны по двум углам.



Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

25 На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Решение.
Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рисунок). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, точка K лежит на стороне AC, а точка H лежит на отрезке BK.



Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда $DQ = MD = 3$. По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 6 \cdot 12 = 72.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

и, таким образом, $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 9AH$.

Значит, $9AH = 72$. Следовательно, $AH = 8$.

Ответ: 8.

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20 Решите неравенство $(x-11)^2<\sqrt{5}(x-11)$.

Решение.
Преобразуем исходное неравенство:
$$(x-11)^2-\sqrt{5}(x-11)<0;\ (x-11)\left(x-11-\sqrt{5}\right)<0,$$
откуда следует, что $11<x<11+\sqrt{5}$.
Ответ: $(11;11+\sqrt{5})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

21 Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Решение.
Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна v км/ч, очевидно, что $v>3$. Получаем уравнение:
$$\frac{210}{v-3}-\frac{210}{v+3}=4;$$
$$210v+630-210v+630=4v^2-36;$$
$$v^2=324,$$
откуда $v=18$ или $v=-18$.
Собственная скорость моторной лодки 18 км/ч.
Ответ: 18 км/ч.

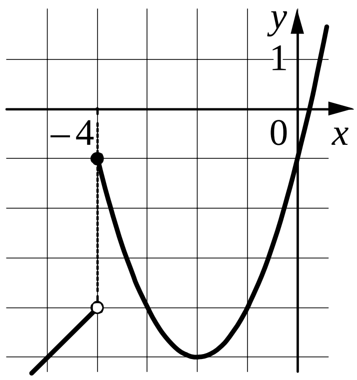
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

22 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+4x-1 & \text{при} \quad x\ge -4, \\ x & \text{при} \quad x< -4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.



Построим график функции $y=x$ при $x<-4$.

Это луч с началом в точке $(-4;-4)$ (точка не принадлежит лучу), проходящий через точку $(-5;-5)$.

Построим график функции $y=x^2+4x-1$ при $x\ge -4$.

Это часть параболы с вершиной $(-2;-5)$ и направленными вверх ветвями, ограниченная точкой $(-4;-1)$.

При каждом значении m прямая $y=m$ параллельна оси Ox или совпадает с ней.

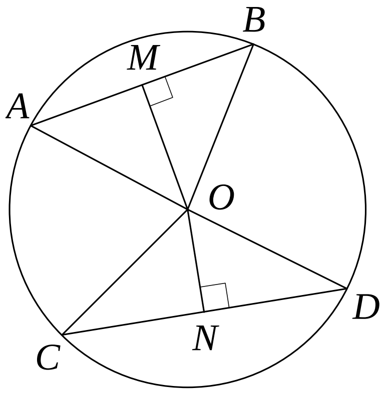
Прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при $m=-5$ или $-4\le m\le -1$.

Ответ: $m=-5$; $-4\le m\le -1$.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

23 Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если $AB = 16$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 15 и 8.

Решение.



Пусть $OM = 15$ и $ON = 8$ — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем:

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 17.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 17$, откуда $CN = \sqrt{OC^2 - ON^2} = 15$. Получаем, что $CD = 2CN = 30$.

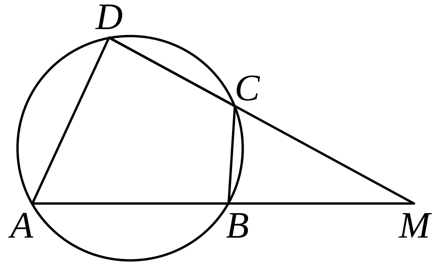
Ответ: 30.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

24 Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Доказательство.

Можно считать, что точка C лежит между точками D и M (см. рисунок).



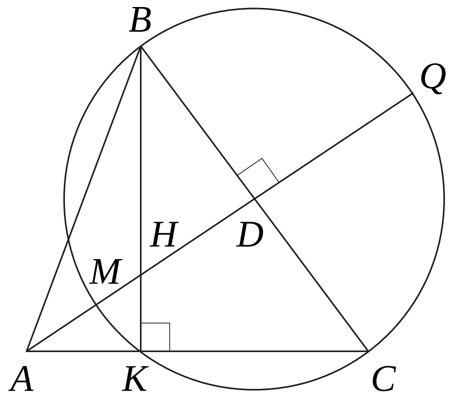
У треугольников MBC и MDA угол M общий. Кроме того, $\angle MBC = 180° - \angle ABC$ как смежный, а $\angle ADC = 180° - \angle ABC$ по свойству вписанного четырёхугольника, поэтому $\angle ADM = \angle CBM$. Значит, треугольники MBC и MDA подобны по двум углам.

Содержание критерия	**Баллы**
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

25 На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 80$, $MD = 64$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Решение.

Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рисунок). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, точка K лежит на стороне AC, а точка H лежит на отрезке BK.



Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда $DQ = MD = 64$. По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 16 \cdot 144 = 2304.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

и, таким образом, $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 80AH$.

Значит, $80AH = 2304$. Следовательно, $AH = 28{,}8$.

Ответ: 28,8.

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*